- Dal teorema di Ceva in forma trigonometrica

$$\sin^3\omega = \sin(\alpha-\omega)\sin(\beta-\omega)\sin(\gamma-\omega)$$

- Da Briggs su $\sin(x)\sin(y)$ e dalle formule di triplicazione del seno segue

$$3\sin\omega = \sin(2\alpha+\omega)+\sin(2\beta+\omega)+\sin(2\gamma+\omega)$$

- Da Briggs su $\sin(x)-\sin(y)$ abbiamo

$$\sin(\alpha)\cos(\alpha+\omega)+\sin(\beta)\cos(\beta+\omega)+\sin(\gamma)\cos(\gamma+\omega)=0$$

$$\cos\omega\ (\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta+\sin\gamma\cos\gamma)=\sin\omega\ (\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)$$

- Moltiplicando ambo i membri per R^2

$$ctg\,\omega = \frac{(R^2\sin^2\alpha+R^2\sin^2\beta+R^2\sin^2\gamma)}{\Delta} = \frac{(a^2+b^2+c^2)}{4\Delta} =$$

$$\frac{(a^2+b^2-c^2)+(a^2+b^2-c^2)+(a^2+b^2-c^2)}{4\Delta} =$$

$$\frac{2ab\cos\gamma}{4\Delta}+\frac{2bc\cos\alpha}{4\Delta}+\frac{2ac\cos\beta}{4\Delta} = ctg\,\alpha+ctg\,\beta+ctg\,\gamma$$

- Ma dalla precedente relazione segue anche che

$$4\Delta\cos\omega = \sin\omega(a^2+b^2+c^2)$$

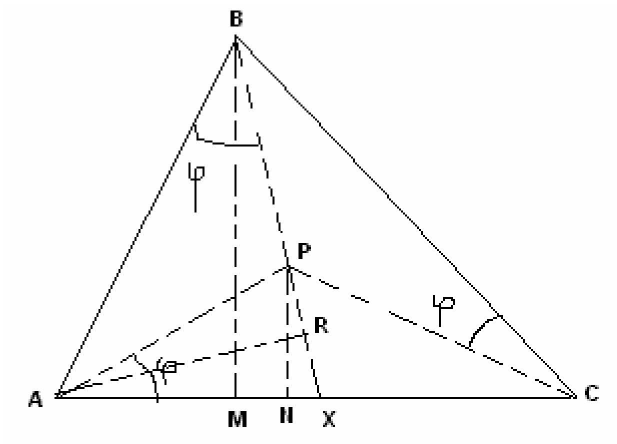
$$16\Delta^2 = \sin^2\omega((a^2+b^2+c^2)^2+16\Delta^2)$$

$$\frac{1}{\sin^2\omega} = \frac{((a^2+b^2+c^2)^2+16\Delta^2)}{16\Delta^2} = \frac{R^2((a^2+b^2+c^2)^2+16\Delta^2)}{a^2b^2c^2} =$$

- Che per diretta applicazione del Teorema di Erone risulta pari a

$$\frac{4R^2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)}{a^2b^2c^2} = \left(\frac{2R}{a}\right)^2+\left(\frac{2R}{b}\right)^2+\left(\frac{2R}{c}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}\ \text{ c.v.d.}$$



Interessante soluzione quella di elianto84,ricca di spunti (come ad esempio la forma trigonometrica del teorema di Ceva).Comunque ecco la mia soluzione un po' piu' ..terra terra.
Siano:
X l'intersezione di BP con AC,M ed N le proiezioni ortogonali di B e P su AC ed R quella di A su BX.Inoltre indichiamo con [XYZ] l'estensione del generico triangolo XYZ.
Dalla similitudine di ABX ed APX si trae:
$$AX : PX = BX : AX => AX^2 = PX * BX$$
e per il teorema dei seni su APX:
$$\frac{sin^2\phi}{sin^2\alpha} = \frac{PX^2}{AX^2} = \frac{PX^2}{PX * BX} = \frac{PX}{BX}$$
Ed ancora:
$$\frac{[APX]}{[ABX]} = \frac{PX * AR}{BX * AR} = \frac{PX}{BX} = \frac{PN}{BM} = \frac{PN * AC}{BM * AC} = \frac{[APC]}{[ABC]}$$
E dunque raccogliendo:
(1) $$\frac{sin^2\phi}{sin^2\alpha} = \frac{[APC]}{[ABC]}$$
Ed analogamente:
(2) $$\frac{sin^2\phi}{sin^2\beta} = \frac{[BPA]}{[BCA]}$$
(3) $$\frac{sin^2\phi}{sin^2\gamma} = \frac{[CPB]}{[CAB]}$$
Sommando (1),(2) e (3):
$$\frac{sin^2\phi}{sin^2\alpha} + \frac{sin^2\phi}{sin^2\beta} + \frac{sin^2\phi}{sin^2\gamma} = 1$$
da cui dividendo per $sin^2\phi$ si ha la tesi.